

ENONCE :

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $4^n + 5$ est un multiple de 3.

Eléments de correction

Considérons la propriété : $\mathcal{P}_n$: « $4^n + 5$ est un multiple de 3 » .

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $4^0 + 5 = 6$ est un multiple de 3 .
- Supposons que $\mathcal{P}_p$ soit vraie pour un entier naturel p . Alors $4^p + 5$ est un multiple de 3.

Donc il existe un entier k tel que $4^p + 5 = 3k$

$$4^{p+1} + 5 = 4 \times 4^p + 5 = 4(3k - 5) + 5 = 12k - 15 = 3(4k - 5) = 3k' \text{ où } k' = 4k - 5 \text{ entier.}$$

donc $4^{p+1} + 5$ est un multiple de 3. $\mathcal{P}_{p+1}$ est donc vraie. La propriété est héréditaire.

CONCLUSION : Pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}_n$ est vraie .